## 培优课05 利用导数研究恒（能）成立问题

### 培优点一 利用导数解决不等式的恒成立问题

#### 审题指导

典例1 已知函数.（审题①分析当时，分离参数可得审题②利用导数分析右边函数的点调性求解即可）求实数的取值范围.

**解题观摩**

[解析]由得，，其中，当时，不等式为，显然成立，符合题意.

当时，，…………审题①

记，…………审题②

令，

则，再令，

则，故单调递增，，

故函数单调递增，，由可得,恒成立.

故当时，，单调递增；

当时，，单调递减.

故.综上可得，实数的取值范围是.

#### 通性通法

**1.分离参数法解含参不等式恒成立的三个步骤**

用分离参数法解含参不等式恒成立问题，可以根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量表达式的不等式.

一般步骤：

第一步：分离参数（注意分离参数时自变量的取值范围是否影响不等式的方向）.

第二步：转化，若对恒成立，则只需；若对恒成立，则只需.

第三步：求最值.

**2.分类讨论法求含参不等式恒成立的思路**

根据不等式恒成立求参数范围,一般是将恒成立问题转化为最值问题，此类问题关键是对参数分类讨论，在参数的每一段上求函数的最值，并判断是否满足题意，要证明不满足题意，只需找一个值或一段内的函数值不满足题意.

#### 培优训练

##### 引入三角函数条件变式

1. 已知函数,，若关于的不等式在区间上恒成立，求实数的取值范围.

[解析]不等式在区间上恒成立，

即在区间上恒成立，

设，

则.

设，

则.

因为当时，,，

所以当时，，

所以函数在上单调递减，且，

所以当时，，即，

则函数在上单调递减，且，

所以当时，，所以.

故实数的取值范围是.

##### 分类讨论法解决含参不等式恒成立问题综合变式

2. [2023·全国甲卷]已知函数,.若恒成立，求实数的取值范围.

[解析],令，则，

则,令，

则,

设，，

则,所以在上单调递增，

所以.

若,则,即在上单调递减,所以，

所以当时,,符合题意.

若,则当时, ,所以 ，

又，所以,使得,

即,,使得，

当时,,即当时,,单调递增，

所以当时,,不合题意.

综上,实数的取值范围为

### 培优点二 利用导数解决不等式的能成立问题

#### 审题指导

典例2 已知函数.（审题①分离参数问题转化为审题②构造新函数，利用导数研究新函数的单调性与最值审题③结合能成立（存在性）的概念解题）求实数的取值范围.

**解题观摩**

[解析]若存在，使得不等式成立，即存在，使不等式成立，

.…………审题①③

，…………审题②

则,，

；…………审题②

.…………审题②

又,,，

，…………审题②

，…………审题③ 所以实数的取值范围为 .

#### 通性通法

**1.含参数的能成立（存在性）问题的解题方法**

（1）在上能成立，则.

（2）在上能成立，则.

**2.含全称量词、存在量词不等式能成立问题**

（1）存在，对任意，使成立，则.

（2）任意，存在，使成立，则.

#### 培优训练

##### 双变量能成立问题设问变式

[2024·广西模拟]已知函数.

（1） 讨论函数的单调性；

[解析]函数的定义域为，

，

①当时，由得，即在上单调递增；

由得，即在上单调递减.

②当时，由得，即在上单调递增；由得，即在上单调递减.

（2） 设 为自然对数的底数，当时，对任意，存在，使，求实数的取值范围.

[解析]当时，由（1）知，函数在上单调递减，

所以，所以,，

对任意，存在，使，

即等价为恒成立，即，所以对任意恒成立.

设，其中，则，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以，故.